Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 3

Die Exponentialapproximation.

Oder:

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?

(Buch S. 42)

Wieder sei

$$T$$

der zufällige Zeitpunkt des ersten Erfolgs

in einem fortgesetzten p-Münzwurf.

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = ?$$

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{2000} = \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}}_{\approx e^{-1}}\right)^{2} \approx e^{-2}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = q^{2000} = \left(1 - \tfrac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = q^{2000} = \left(1 - \tfrac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

$$\mathbf{P}(T > 2 \cdot \mathbf{E}[T]) \quad \approx \quad e^{-2}$$

$$\mathbb{E}[T] = 1000$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(T > 2000) = q^{2000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{2000} \approx e^{-2}$$

$$\mathbf{P}(T > 2 \cdot \mathbf{E}[T]) \approx e^{-2}$$

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > 2\right) \approx e^{-2}}$$

$$\{T > 2\,\mathbf{E}[T]\} = \left\{\frac{T}{\mathbf{E}[T]} > 2\right\}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{T}{\mathbf{E}[T]}\right] = \frac{1}{\mathbf{E}[T]}\,\mathbf{E}[T] = 1$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\underbrace{\mathbf{P}\{\widetilde{T} > t\}}_{= \mathbb{P}(pT > t)} = \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \underbrace{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}_{\in \mathbb{N}_0}\right)$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\widetilde{T} > t\} &= \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\right) \\
&= \left(1 - p\right)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor} \\
&= \left(1 - p\right)^{\frac{1}{p} p \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}
\end{aligned}$$

$\approx e^{-1}$

$$p\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor \xrightarrow[p \to 0]{} t$$

Betrachten wir T *auf der Skala seines Erwartungswertes*:

$$\widetilde{T} := \frac{T}{\mathbf{E}[T]} = pT.$$

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\mathbf{P}\{\widetilde{T} > t\} = \mathbf{P}\left(T > \frac{t}{p}\right) = \mathbf{P}\left(T > \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor\right)$$

$$= \left(1 - p\right)^{\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}$$

$\to e^{-1}$

$$= \left(1 - p\right)^{\frac{1}{p} p \left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor}$$

$\to t$

Für $p \to 0$ konvergiert dies gegen

$$(e^{-1})^t = e^{-t}.$$

Diese Tatsache formulieren wir als einen *Grenzwertsatz*:

(vgl. Buch S. 42)

Satz Sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Folge von geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[T_m] \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Dann gilt für jedes $t \geq 0$:

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{T_m}{\mathbf{E}[T_m]} > t\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} e^{-t}}$$